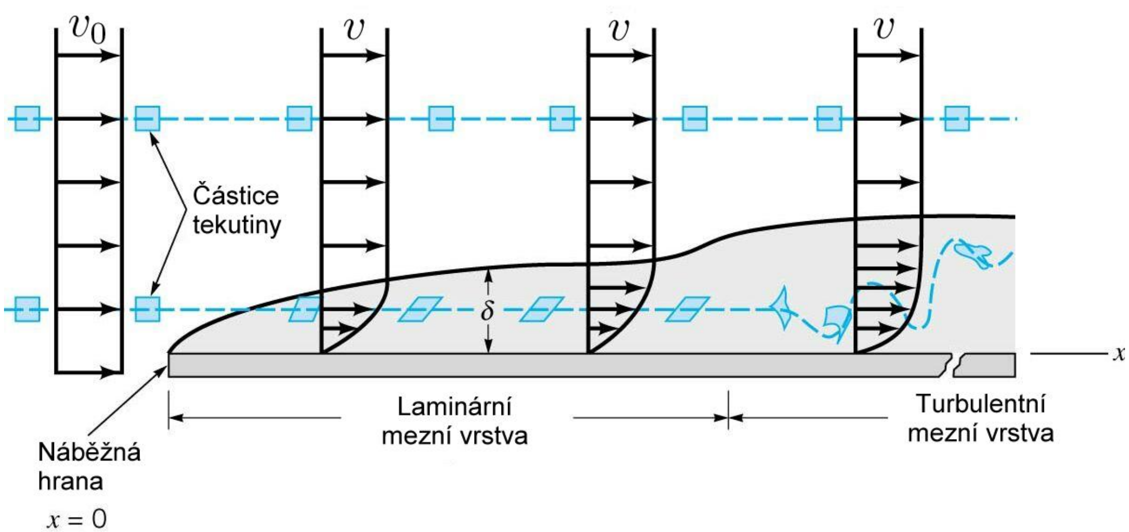
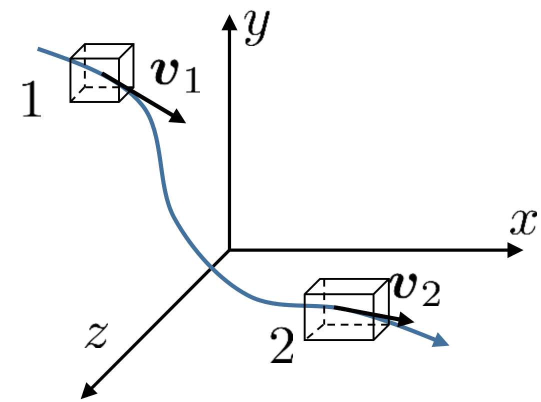
Potenciální proudění

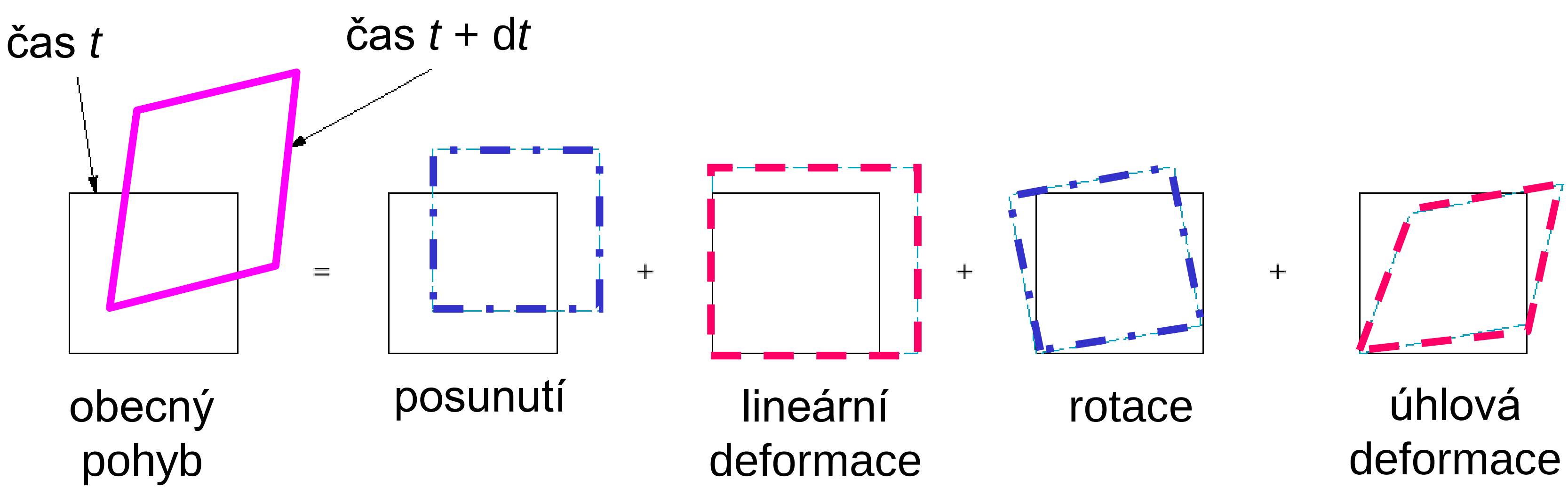
+ plížívé obtékání koule

M. Jahoda

Pohyby elementu tekutiny

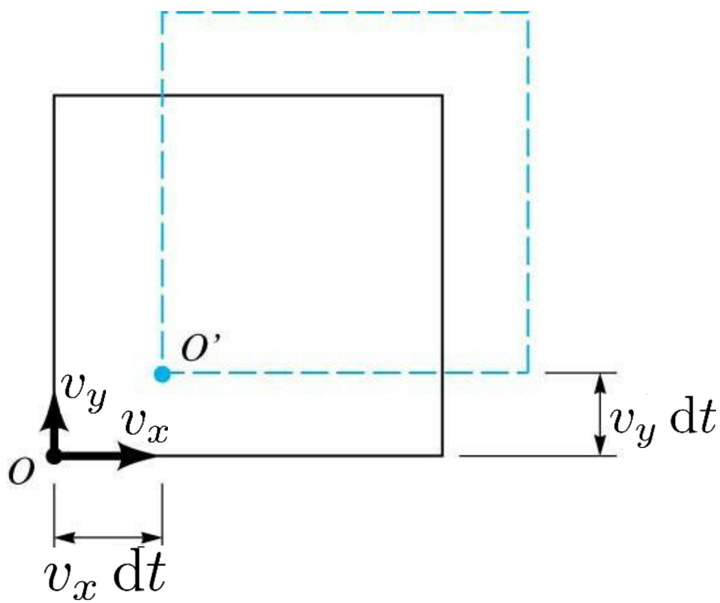






Pohyby elementu tekutiny

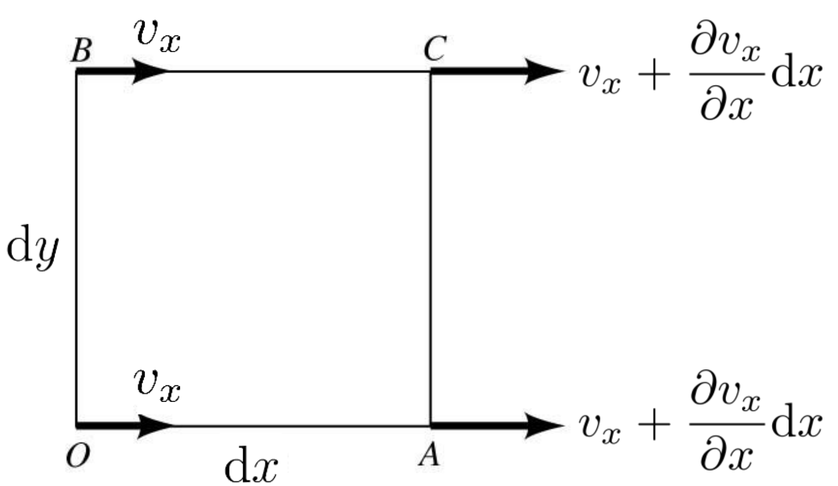
Lineární pohyb

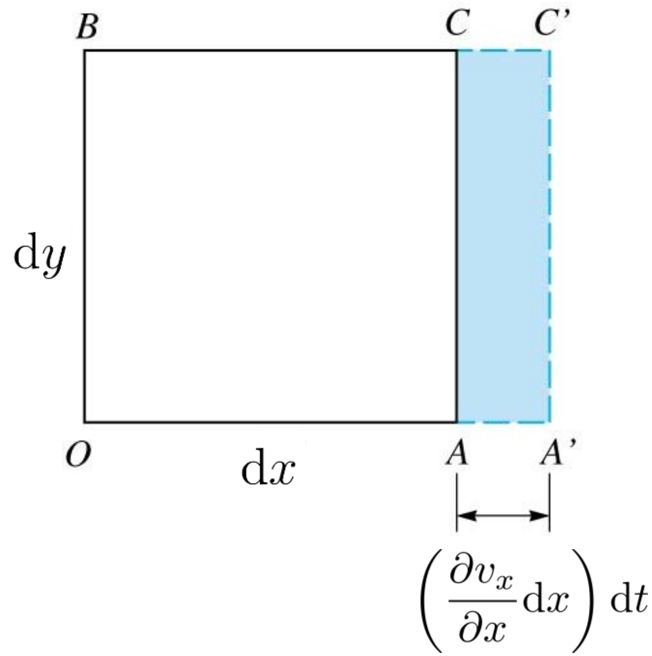


"Nejjednodušší" forma pohybu
- element se pohybuje jako pevné těleso

Lineární deformace

Gradienty rychlosti mohou způsobit lineární deformaci elementu tekutiny; změnu velikosti elementu.





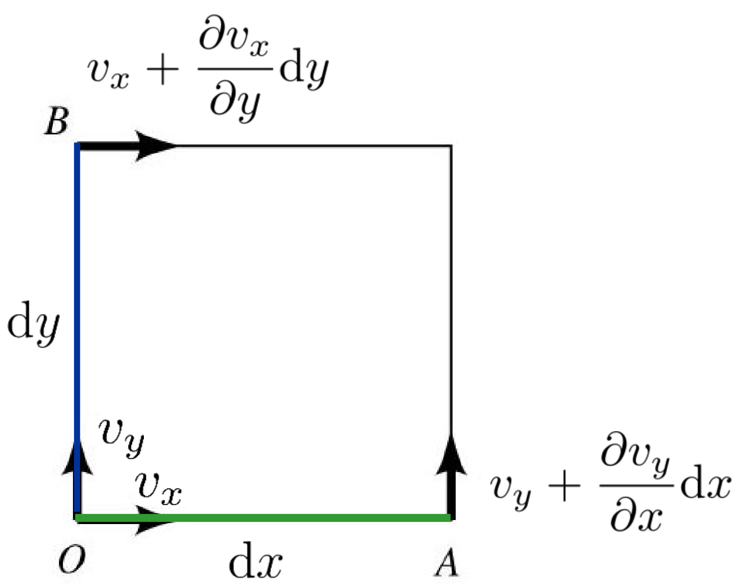
Změna objemu: $\delta V = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$

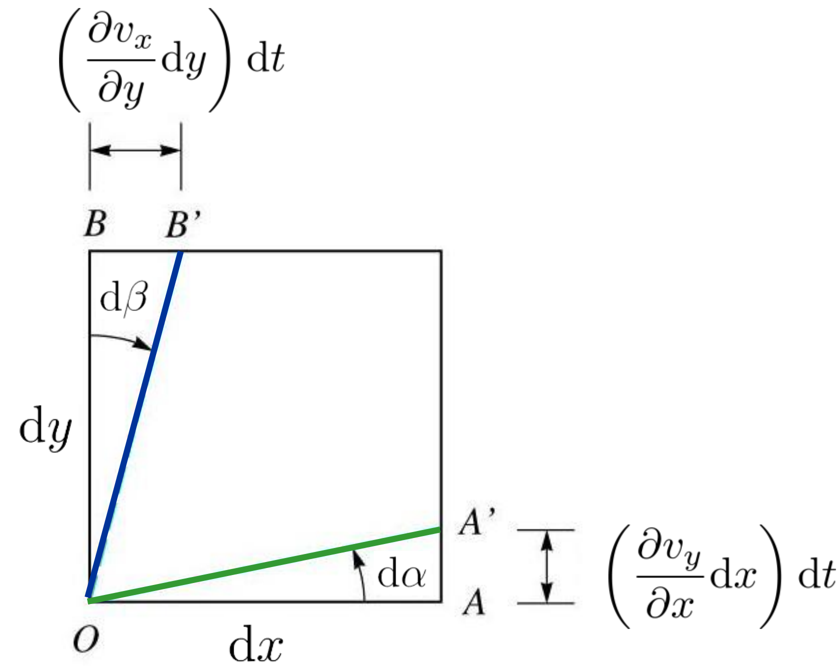
Rychlost změny v jednom směru na jednotku objemu:

$$\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left[\frac{(\partial v_x/\partial x)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Lineární deformace je NULOVÁ pro nestlačitelné tekutiny.

Úhlová deformace





$$\omega_{OA} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

$$\tan \mathrm{d}\alpha \approx \mathrm{d}\alpha = \frac{(\partial v_y/\partial x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}t$$

$$\omega_{OA} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \left[\frac{(\partial v_y/\partial x)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\omega_{OB} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}$$

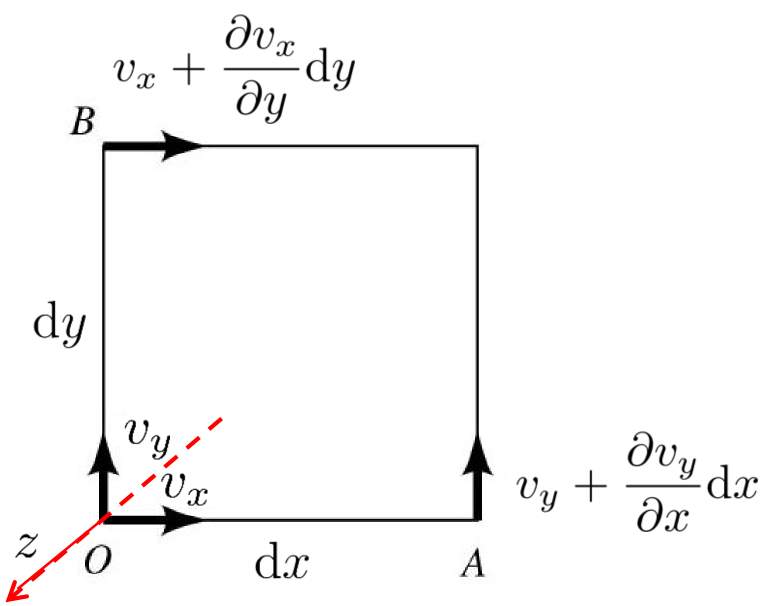
$$\tan \mathrm{d}\beta \approx \mathrm{d}\beta = \frac{(\partial v_x/\partial y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}t$$

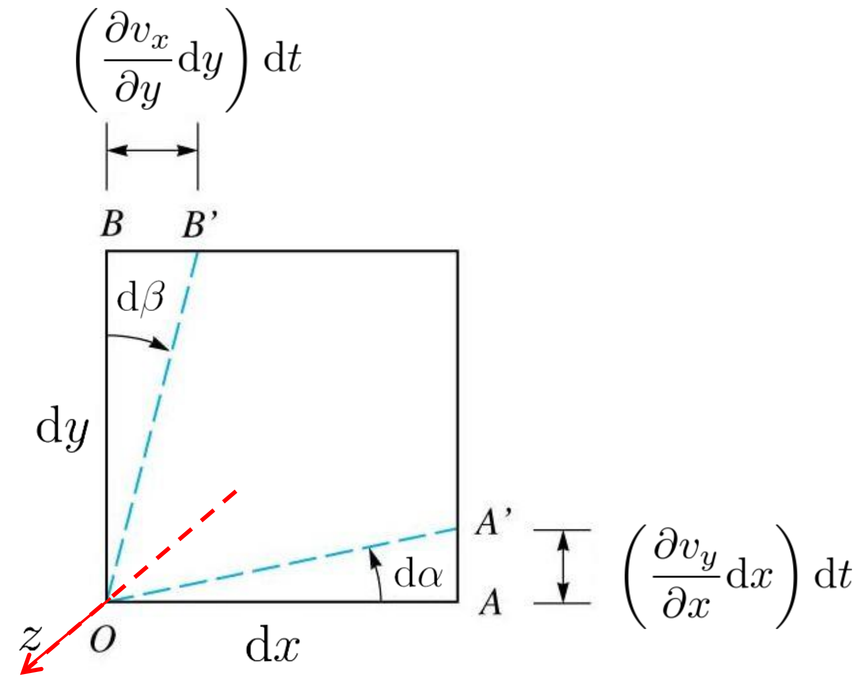
$$\omega_{OB} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \left[\frac{(\partial v_x/\partial y)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

ω_{OA} - úhlová rychlost přímky OA

ω_{OB} - úhlová rychlost přímky OB

Úhlová rotace





Rotace ω_z kolem osy *z* je definována jako průměrné úhlové rychlosti ω_{OA} a ω_{OB}

Levotočivá rotace kolem osy *z*

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

kolem osy *x* $\quad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$

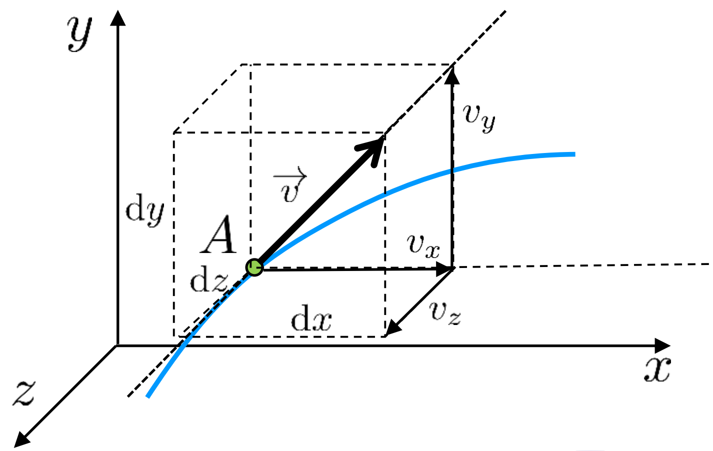
vektor rotace

$$\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$$

kolem osy *y* $\quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$

Proudnice

- je trajektorie pohybu jednotlivých částic při proudění kapalin
- znázorňují okamžitý stav proudění, jsou obdobou silokřivek v silovém poli
- libovolným bodem v prostoru při ustáleném proudění prochází jen jedna proudnice (proudnice se nemohou protínat)
- pohyb tekutiny podél proudnice je postupný – pohyb tekutiny ve směru kolmém na proudnice není možný

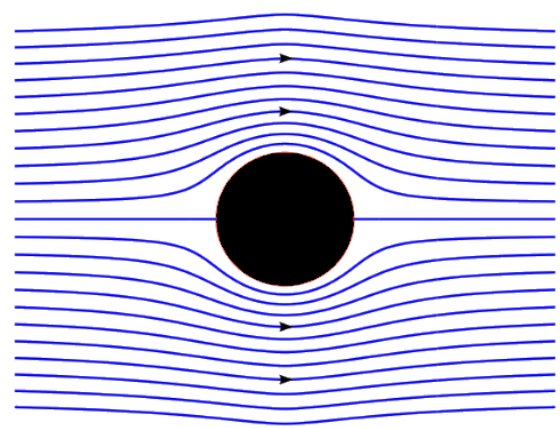


Rovnice proudnice

- rychlost částice v libovolném místě proudu je tečnou k proudnici
- rychlost proudění v bodě A rozložíme do složek, z grafického vyjádření platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}$$

Proudnice lze zviditelnit malými částicemi, které jsou tekutinou unášeny (piliny, kouř, barvivo apod.).



Potenciální proudění

= nejjednodušší proudění, jaké vůbec může existovat

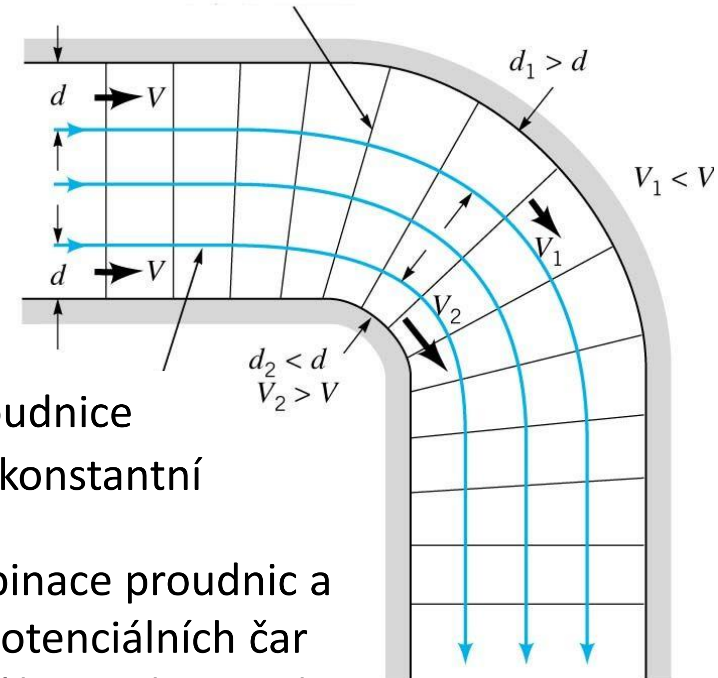
- ze všech vlastností, které může proudění mít, respektuje pouze kontinuitu a setrvačnost
- zavedli matematici, kteří při zkoumání určitých tříd funkcí zjistili, že jejich chování odpovídá proudění tekutiny
  - pro inženýry je však nepříjemné poněkud zvláštní názvosloví
  - pracuje se zde se dvěma funkcemi:
    - proudová funkce Ψ
    - potenciál rychlosti ϕ

Vlastnosti

- nevazké
- nestlačitelné
- ustálené
- dvourozměrné
- nevířivé

ekvipotenciální čáry

ϕ = konstantní



proudnice

Ψ = konstantní

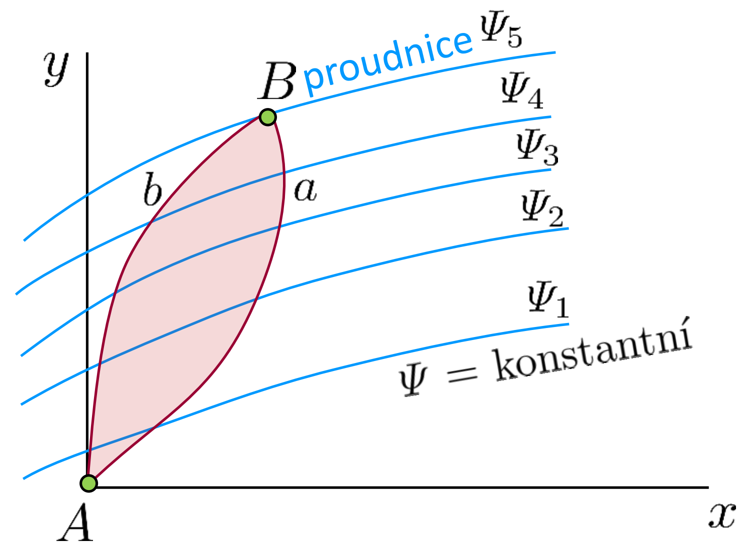
Kombinace proudnic a ekvipotenciálních čar slouží k vizualizaci toku.

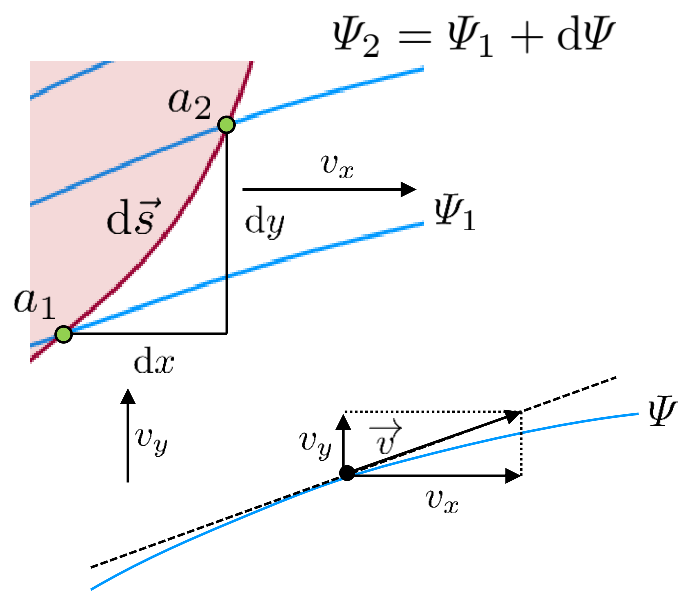
Proudová funkce, 2D

- uvažujme rovinné proudění* v prostoru mezi dvěma body A a B
- množství proteklé tekutiny závisí jen na poloze bodu B, když A v počátku souřadné soustavy budeme považovat za pevný
- tok nestlačitelné tekutiny obloukem *b* je stejný jako obloukem *a*, tekutina ve vymezeném prostoru nevzniká ani nezaniká, tok je ustálený
- průtok** $\mathrm{d}\dot{V}$ křivkou mezi body $a_1 - a_2$

$$\mathrm{d}\dot{V} = -v_y\,\mathrm{d}x + v_x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Psi$$

$$\dot{V} = \int_A^B \mathrm{d}\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$





$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} \longrightarrow v_y\mathrm{d}x = v_x\mathrm{d}y$$

* rovinné proudění znamená, že vektory rychlostí všech částic tekutiny leží v jedné rovině

** znaménko (+), když tekutina objem opouští, (-), když do Δ vstupuje

Proudová funkce, 2D

Kartézské souřadnice

Proudová funkce je skalární funkce souřadnic, ke každému bodu roviny xy lze připsat určitou hodnotu

$$\mathrm{d}\Psi(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Pomocí proudové funkce lze stanovit i rychlostní pole, tj. složky rychlosti v každém bodě

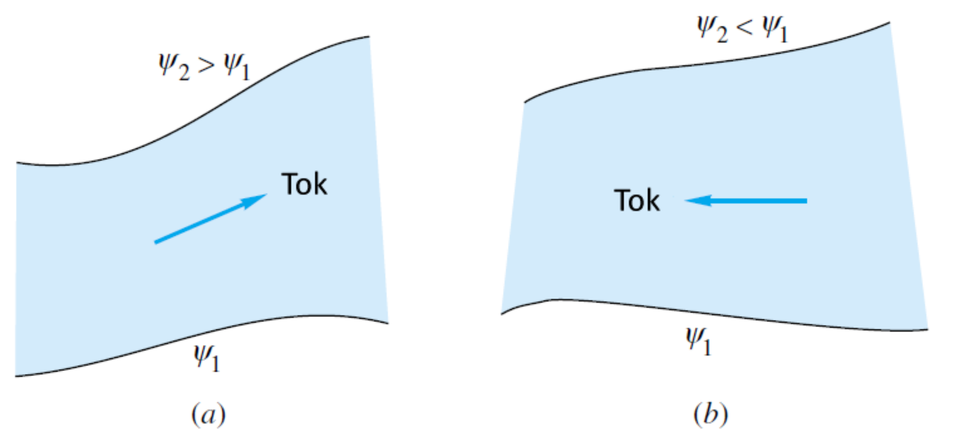
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\dot{V} &= v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Psi \\ \mathrm{d}\Psi(x,y) &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \quad v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}} \qquad \boxed{v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}}$$

Proudová funkce identicky splňuje rovnici kontinuity nestlačitelné tekutiny

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\,\partial y} = 0$$



Proudová funkce, 2D

Kartézské souřadnice

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Dosazení do 2D N-S rovnice, konst. hustota

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_j\, v_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + f_i$$

Směr X $$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}\right) + f_x$$

Směr Y $$\left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho}\left(-\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2}\right) + f_y$$

První rovnici derivujeme ještě podle *y* a odečteme od ní druhou rovnici derivovanou podle *x*.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

eliminujeme hnací sílu

ze dvou N-S rovnic vznikne jediná

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^4 \Psi$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4 \Psi \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\Psi$$

Proudová funkce, 2D

Kartézské souřadnice

- **ustálené plíživé (nevírové) proudění**

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^4 \Psi$$

- ustálené

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial t} = 0$$

- nevírové

$$\left.\begin{aligned} \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0 \\ v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2 \Psi = 0$$

- ustálené plíživé (nevírové) proudění

$$\nabla^4 \Psi = 0 \qquad\qquad \nabla^4 \Psi \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\Psi$$

Potenciál rychlosti, 2D

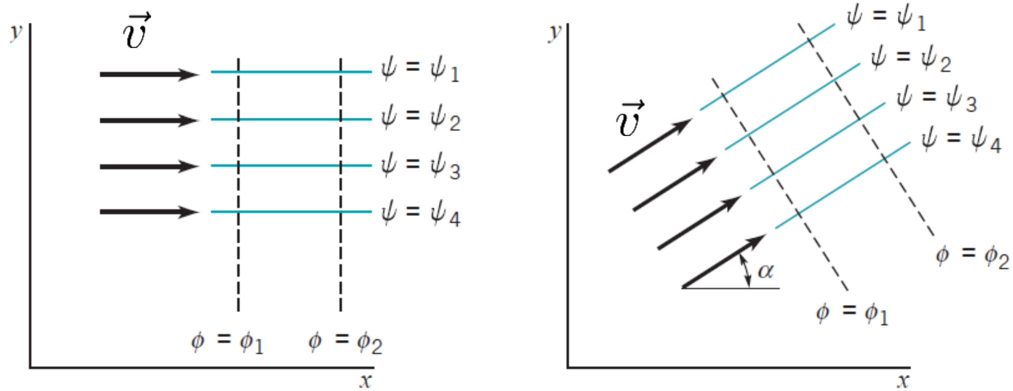
Kartézské souřadnice

Definujeme rychlostní potenciál pro nevířivý tok:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

dosadíme-li do rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$



(a) (b)

dostane se Laplaceova rovnice pro funkci ϕ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi = \vec{v}(x\ \cos\alpha + y\ \sin\alpha)$$

$$\Psi = \vec{v}(y\ \cos\alpha - x\ \sin\alpha)$$

Diference potenciálu rychlosti je cirkulace. Cirkulace podél nějaké křivky se vypočte jako křivkový integrál z tečných složek rychlostí násobených přilehlými elementy křivky.

$$v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

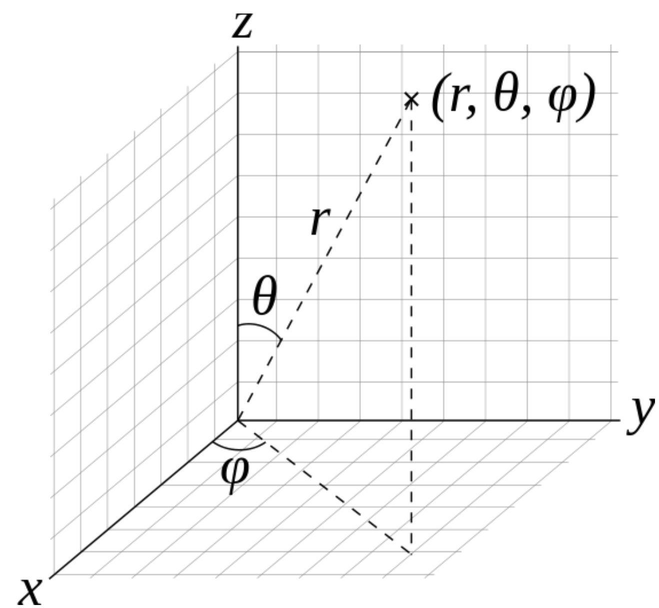
Sférické souřadnice, 3D

- sférické souřadnice v ISO značení

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$



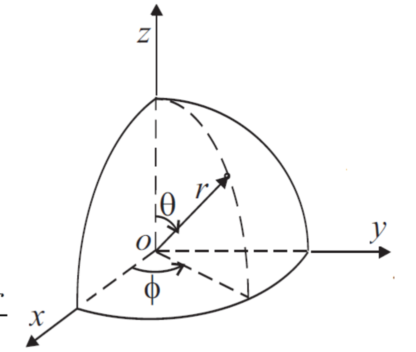
$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi$$

$$y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi$$

$$z = r\,\cos\theta$$

Navierovy-Stokesovy rovnice

Sférické souřadnice,3D,nestlačitelné tekutiny



$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\sin\theta\right)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\sin\theta\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\phi^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}+\mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\phi\sin\theta\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)+\rho g_\phi$$

Zdroj: prof. F. Morison (http://www.chem.mtu.edu/~fmorriso/cm310/Navier.pdf)

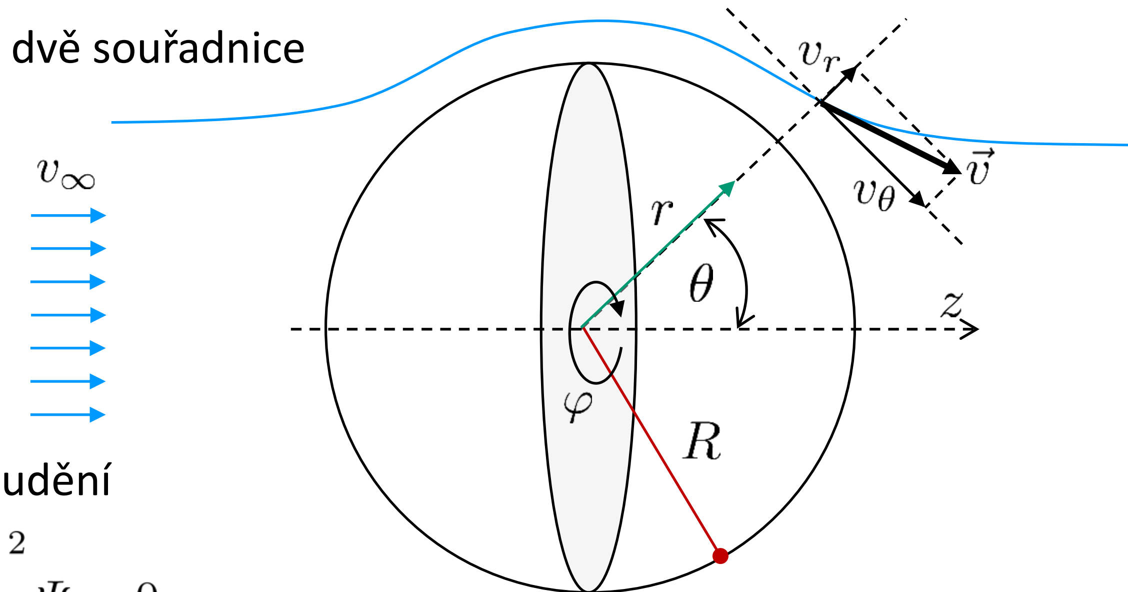
Plížívé obtékání koule

Sférické souřadnice, 3D

- osová symetrie => stačí pouze dvě souřadnice

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$v_\theta = +\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$



- ustálené plížívé (nevírové) proudění

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2 \Psi = 0$$

Řešení

- okrajové podmínky:

$$\left.\begin{aligned} r = R, \qquad & v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0 \\ r = R, \qquad & v_\theta = +\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \text{na povrchu koule je rychlost nulová}$$

$$r \to \infty, \qquad \Psi \to -\frac{1}{2} v_\infty r^2 \sin^2\theta$$

daleko od tělesa
$v_z \to v_\infty$

Zdroj: Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N. : Transport Phenomena, John Wiley & Sons., 2007

Sférické souřadnice, 3D

Řešení

- předpoklad:

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(r,\,\theta) = f(r)\,\sin^2\theta \quad \text{vložíme} \\[2ex] \left[\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2 \Psi = 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{získáme}} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{2}{r^2}\right) f = 0$$

= lineární homogenní rovnice čtvrtého řádu

Zkoušením bylo zjištěno: $f(r) = C_1\,r^{-1} + C_2\,r + C_3\,r^2 + C_4\,r^4$

Z třetí okrajové podmínky: $C_4 = 0, \qquad C_3 = -\frac{1}{2}\,v_\infty$

Výsledná proudová funkce: $\Psi(r,\,\theta) = \left(C_1\,r^{-1} + C_2\,r - \frac{1}{2}v_\infty\,r^2\right)\sin^2\theta$

Složky rychlosti:

$$v_r = -\frac{1}{r^2\,\sin\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \left(v_\infty + 2\frac{C_2}{r} - 2\frac{C_1}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = +\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \left(-v_\infty + \frac{C_2}{r} - \frac{C_1}{r^3}\right)\sin\theta$$

Zdroj: Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N. : Transport Phenomena, John Wiley & Sons., 2007

Plížívé obtékání koule

Sférické souřadnice, 3D

Řešení

- složky rychlosti: $$v_r = \left(v_\infty + 2\frac{C_2}{r} - 2\frac{C_1}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = \left(-v_\infty + \frac{C_2}{r} - \frac{C_1}{r^3}\right)\sin\theta$$

+ okrajové podmínky:

$$r = R, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0$$

dostaneme:

$$C_1 = -\frac{1}{4}v_\infty R^3 \qquad C_2 = -\frac{3}{4}v_\infty R$$

Výsledné řešení složek rychlosti:

$$\boxed{v_r = v_\infty\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\theta}$$

$$\boxed{v_\theta = -v_\infty\left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\sin\theta}$$

Zdroj: Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N. : Transport Phenomena, John Wiley & Sons., 2007